

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅 

管理

<

2022年3月

>

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动你的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457097

排名 - 1198

多变量微积分笔记5——梯度与方向导数

梯度一词有时用于斜度，也就是一个曲面沿着给定方向的倾斜程度。

梯度的本意是一个向量（矢量），表示某一函数在该点处的方向导数沿着该方向取得最大值，即函数在该点处沿着该方向（此梯度的方向）变化最快，变化率最大（为该梯度的模）。

在单变量的实值函数的情况，梯度只是导数，或者，对于一个线性函数，也就是线的斜率。

本篇涉及到的一些知识点可参考下面的链接：

1. 向量：《线性代数笔记2——向量（向量简介）》

2. 点积：《线性代数笔记3——向量2（点积）》

3. 平面和法向量：《线性代数笔记5——平面方程与矩阵》

4. 向量方程和直线的参数方程：《线性代数笔记6——直线和曲线的参数方程》

梯度的定义

如果 $w = w(x, y, z)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, 根据上篇介绍的链式法则：

$$\frac{dw}{dt} = w_x \frac{dx}{dt} + w_y \frac{dy}{dt} + w_z \frac{dz}{dt}$$

如果设 ∇w 是一个综合了 w 所有偏导数的向量， $d\mathbf{r}/dt$ 是 w 变化速率的向量（速度向量），即：

$$\nabla w = \langle w_x, w_y, w_z \rangle$$
$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right\rangle$$

这样原式就可以简写为 ∇w 和 $d\mathbf{r}/dt$ 的点积：

$$\frac{dw}{dt} = \nabla w \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

∇w 就是梯度向量，简称梯度。对于函数 w 定义域上的任意 x, y, z ，都可以得到一个对应的梯度向量，所以说 ∇w 是 w 在某一点 (x, y, x) 上的梯度。由定义可以看到，梯度包含了偏导和导数的信息。

梯度垂直于等值面

梯度的一个重要性质是：如果令 w 是一个常数，则梯度向量垂直于原函数的等面值。

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

- 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

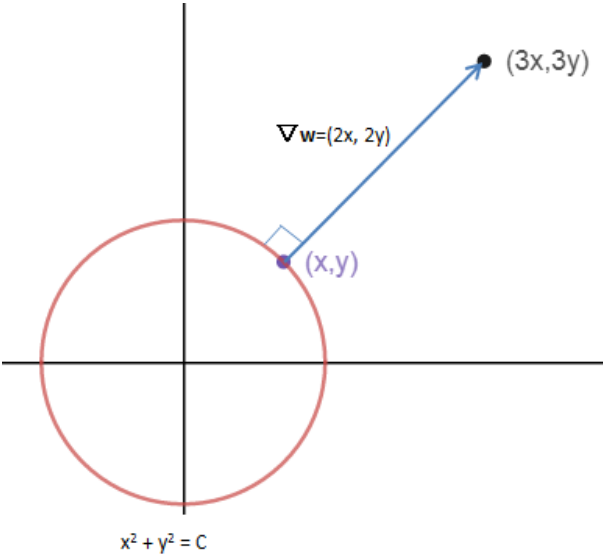
最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0, 即夹角小于90°, 这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人

在平面直角坐标系中, 对于圆的方程 $w(x, y) = x^2 + y^2 = C$, $w = C$, 在 w 上的任意一点 (x, y) 做梯度向量:

$$\nabla w(x, y) = \left\langle \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right\rangle = \langle 2x, 2y \rangle$$

$w \perp$ 等值线,即对于任意 (x, y) 的梯度 ∇w , 都有 $\nabla w \perp w(x, y)$



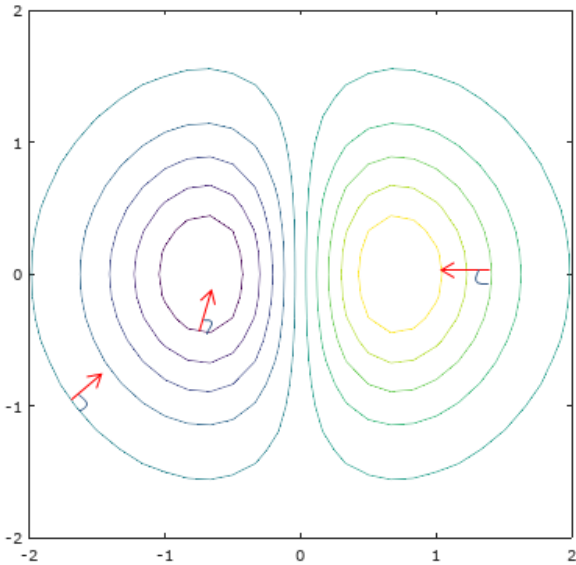
对于多元函数也是如此, 此时梯度是垂直于函数等值面的空间向量。

先来看最简单的线性方程, $w(x, y, z) = a_1x + a_2y + a_3z$, 假设它的等值面是 $a_1x + a_2y + a_3z = C$, 此时 w 的梯度:

$$\nabla w = \left\langle \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z} \right\rangle = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$$

$a_1x + a_2y + a_3z = C$ 的法向量也是 $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, 所以对于平面来说, 法向量就是梯度向量。

对于更复杂的三元函数, 每个梯度都垂直于相应的等高线:



垂直的原因

可以通过三元函数对梯度垂直于等值面加以证明。

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)

有些图片挂了呢

--ccchendada

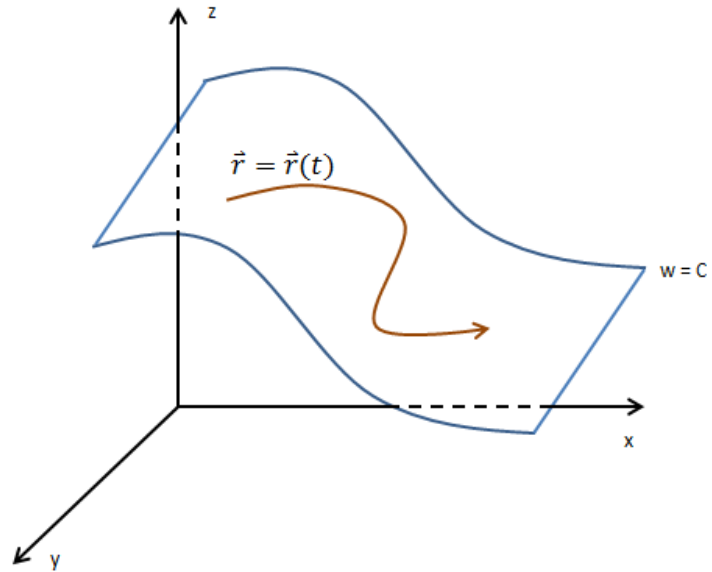
5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

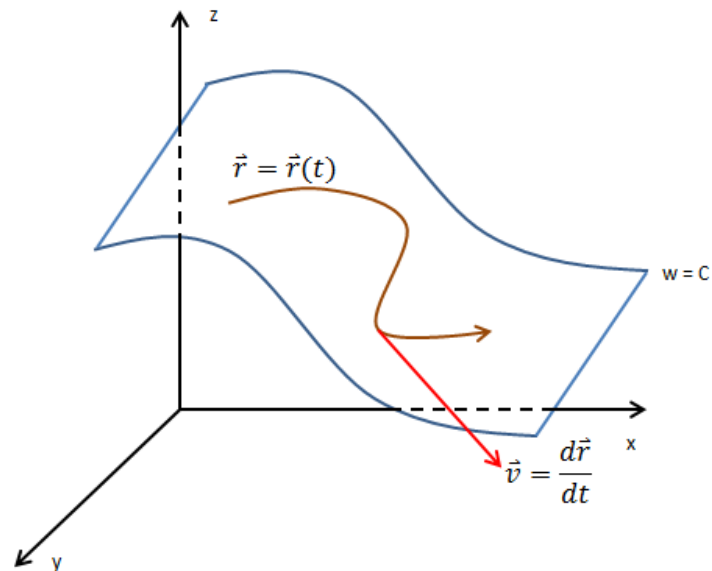
三元函数的等值面 $w(x, y, z) = C$ 是一个曲面，等值面上的一条曲线向量是 $\vec{r} = \vec{r}(t)$:



对于等值面上的曲线来说，它的速度向量：

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right\rangle$$

如果点在 w 上移动，在任一点上的速度向量 $\vec{v}$ 和曲线 $\vec{r}$ 相切；由于 $\vec{r}$ 在 w 上，所以速度向量 $\vec{v}$ 与曲面 w 相切。



链式法则告诉我们 w 的值是由 w 的梯度向量和速度向量的点积决定的：

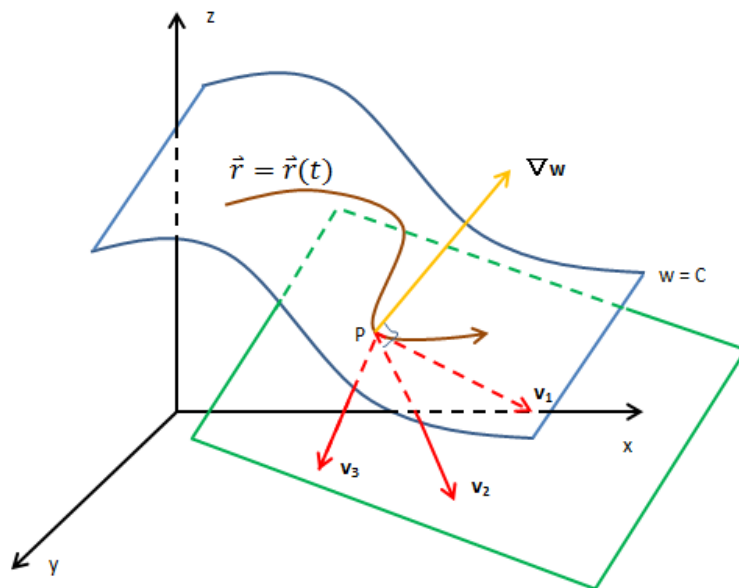
$$\frac{dw}{dt} = \nabla w \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \nabla w \cdot \vec{v}$$

由于 w 是等值面，所以：

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dC}{dt} = 0$$

$$\frac{dw}{dt} = \nabla w \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \nabla w \cdot \vec{v} = 0$$

由于点积为0，所以 $\nabla w \perp \mathbf{v}$ 。对于任意方向的速度向量 $\mathbf{v}$ ，它们都源于同一点P，并且将共同组成一个曲线在该点的切平面， ∇w 垂直于这个切平面，也就是 ∇w 在P点与等值面垂直。



从上面的论述得知，梯度向量垂直于函数在某点的等值面，等同于梯度垂直于在该点处的切面，梯度向量就是切平面的法向量。由此我们可以根据某点的梯度求得函数在该点处的切平面。

找出切平面

示例：找出 $x^2 + y^2 - z^2 = 4$ 在 $(2, 1, 1)$ 处的切平面

这相当于 $w(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ 在 $w = 4$ 时的等值面。在 $(2, 1, 1)$ 点处：

$$\nabla w = \left\langle \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z} \right\rangle = \langle 2x, 2y, -2z \rangle$$

$$\nabla w(2,1,1) = \langle 4, 2, -2 \rangle$$

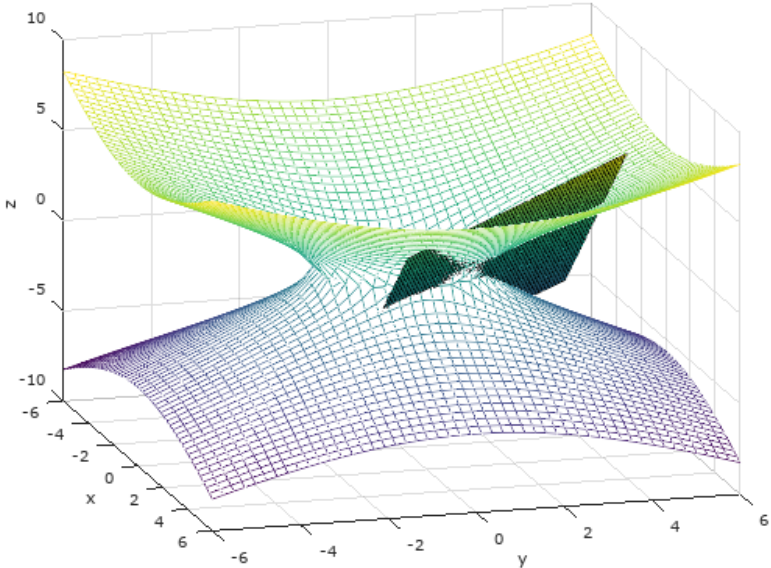
也就是切平面的法向量是 $\langle 4, 2, -2 \rangle$ ，切平面是：

$$4x + 2y - 2z = C$$

将 $(2, 1, 1)$ 代入切平面后， $C = 8$ ，最终得到切平面：

$$2x + y - z = 4$$

下图就是这个不怎么好看的三维图形：



方向导数

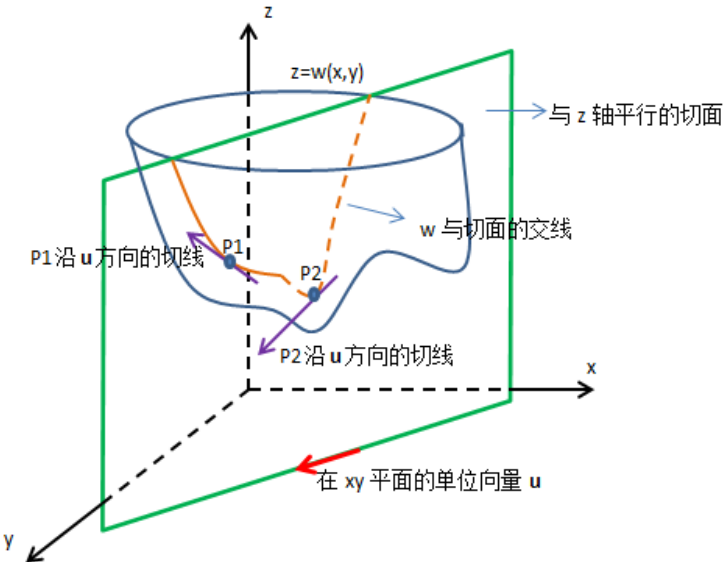
什么是方向导数

方向导数是梯度向量的重要应用。

$w = w(x, y)$ 的偏导 w_x 和 w_y 衡量了点在x轴和y轴移动时w的变化，那么如果在其它方向移动呢？是否在任意方向上都有一个导数呢？答案是肯定的，那就是方向导数。

几何意义

对于 $w(x, y)$ 来说，偏导的几何意义是平行于x轴或y轴方向的垂直平面上截线的斜率。类似的，方向导数就是某一方向上垂直平面截线在该方向的斜率，如下图所示：

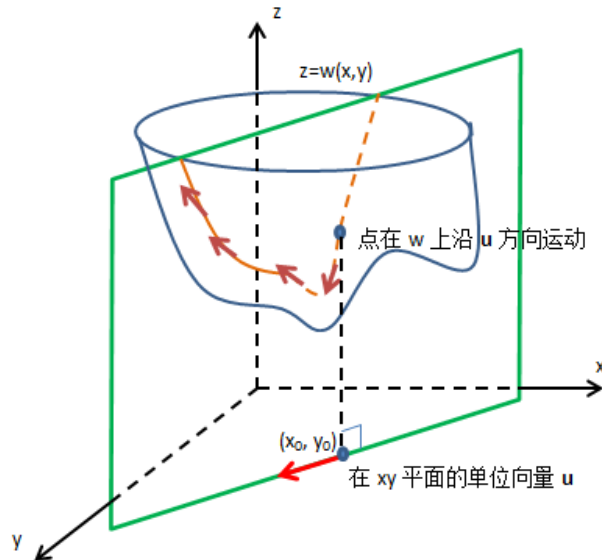


P1和P2点沿着u方向切线的斜率就是这两点在u方向上的方向导数。

计算方向导数

点沿着x轴或y轴移动会产生一系列向量，如果沿着其它方向——例如某个单位向量u的方向——移动会如何？也就是给出一个单位向量u，沿着u的方向移动，函数值的会变化有多快？如下图所示， $z = w(x, y)$ 是一个多

元函数，在某点 (x, y) 处开始，有一个单位向量 $\mathbf{u}$ ，问题是：当 w 上的对应点沿着 $\mathbf{u}$ 的方向变化时，函数 w 的值变化的有多快？



先来看看直线的轨迹。如果以单位速度沿着 $\mathbf{u}$ 的方向运动，设 s 是运动的距离，轨迹向量 $\mathbf{r}$ 是点运动的轨迹，因为是直线，所以 $s = |\mathbf{r}|$ 。现在设轨迹向量 $\mathbf{r}$ 是关于运动距离的函数， $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ ，那么 $\mathbf{r}$ 的变化率是单位向量 $\mathbf{u}$ ，也就是 $\mathbf{r}$ 的导数 $d\mathbf{r}/ds = \mathbf{u}$ 。

我们真正关注的是沿着 $\mathbf{r}$ 的方向运动时， w 的变化率是什么？也就是说，我们从一点开始，沿着某个方向改变变量（不一定是 x 或 y 的方向，可以是任意方向，比如这里 $\mathbf{r}$ 的方向），它的方向导数是什么？也就是 $dw/ds = ?$

$\mathbf{u}$ 是和 $\mathbf{r}$ 同向的单位向量，现在将 $\mathbf{u}$ 作为下标代入 dw/ds ，表示沿 $\mathbf{u}$ 方向移动的导数：

$$\left. \frac{dw}{ds} \right|_{\hat{\mathbf{u}}} = \nabla w \cdot \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{ds} = \nabla w \cdot \mathbf{u}$$

这就是在 $\mathbf{u}$ 方向上的方向导数的公式。

如果把 $\mathbf{u}$ 写成两个方向的分量， $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ ， $\mathbf{u}$ 方向上的方向导数实际上也是梯度向量 ∇w 在 $\mathbf{u}$ 方向上的分量：

$$\left. \frac{dw}{ds} \right|_{\hat{\mathbf{u}}} = \nabla w \cdot \mathbf{u} = \left\langle \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right\rangle \cdot \langle a, b \rangle = \frac{\partial w}{\partial x} a + \frac{\partial w}{\partial y} b$$

例如在 x 轴方向的方向导数，就等于 x 轴方向的分量，设 x 轴方向的单位向量是 $\mathbf{i}$ ，则：

$$\left. \frac{dw}{ds} \right|_{\mathbf{i}} = \nabla w \cdot \mathbf{i} = \left\langle \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right\rangle \cdot \langle 1, 0 \rangle = \frac{\partial w}{\partial x}$$

根据点积的定义，两个向量的点积等于这两个向量的模的乘积乘以二者的夹角余弦，这可以得到方向导数的第二个公式：

$$\left. \frac{dw}{ds} \right|_{\hat{u}} = \nabla w \cdot \mathbf{u} = |\nabla w| |\mathbf{u}| \cos \theta = |\nabla w| \cos \theta$$



最终，方向导数的计算公式是：

$$\left. \frac{dw}{ds} \right|_{\hat{u}} = \nabla w \cdot \hat{\mathbf{u}} = |\nabla w| \cos \theta$$

梯度的意义

现在再看看梯度告诉了我们什么。

方向导数计算了梯度向量在 $\mathbf{u}$ 方向上的分量，让我们试着找出 w 在哪个方向上变化的最快，哪个方向上变化最慢或者根本不变。

由于已知 w 函数和 w 上的一点，所以梯度是已知的，不确定的是方向，根据方向导数的公式可以得到以下结论：

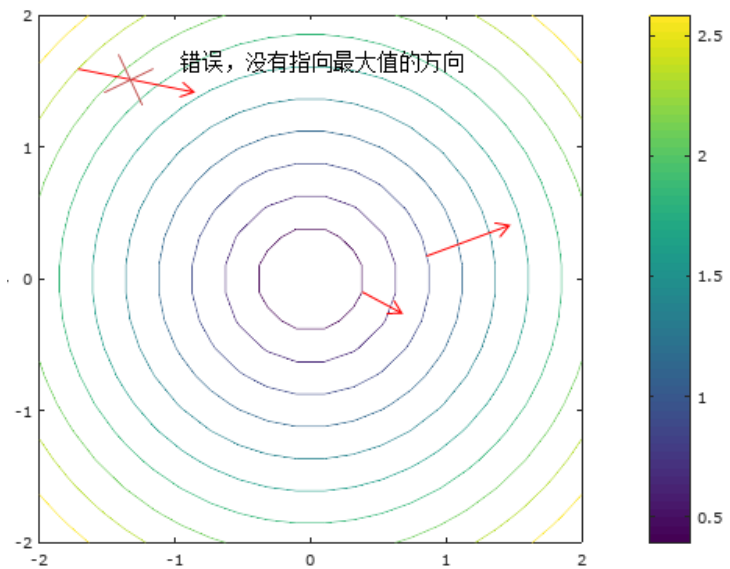
$$\left. \frac{dw}{ds} \right|_{\hat{u}} = |\nabla w| \cos \theta \Rightarrow$$

$$\left. \frac{dw}{ds} \right|_{\hat{u}} \text{ is Max, when } \cos \theta = 1, \theta = 0; \left. \frac{dw}{ds} \right|_{\hat{u}} = |\nabla w|$$

$$\left. \frac{dw}{ds} \right|_{\hat{u}} \text{ is Min, when } \cos \theta = -1, \theta = \pi = 180^\circ; \left. \frac{dw}{ds} \right|_{\hat{u}} = -|\nabla w|$$

$$\left. \frac{dw}{ds} \right|_{\hat{u}} \text{ is ont change, when } \cos \theta = 0, \theta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ; \left. \frac{dw}{ds} \right|_{\hat{u}} = 0$$

由此得到了梯度的一种理解：梯度的方向是在给定点处令 w 的值增加得最快的方向；或者说在给定点处朝梯度方向运动， w 的值将变化的最剧烈，变化率，也就是斜率等于梯度的模长。梯度的反方向， w 的值减小的最快；梯度垂直的方向，也就是与等值面相切的方向， w 不变。如果把 w 看作爬山， w 上的给定点是你站立的位置，那么梯度方向就是向上爬山时最陡峭的地方，梯度的逆向就是向下爬时最陡峭的地方，梯度垂直方向就是站立点的等高线。在等高线上，梯度总是指向值最大的方向：



综合示例

示例1

求 $z = x^3 + 3xy^2$ 在 $(1, 2, 13)$ 处的切平面。

$$w(x, y, z) = x^3 + 3xy^2 - z = 0$$

$$\nabla w = \left\langle \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z} \right\rangle = \langle 3x^2 + 3y^2, 6xy, -1 \rangle$$

$$\nabla w(1, 2, 13) = \langle 15, 12, -1 \rangle$$

切平面的法向量是 $\langle 15, 12, -1 \rangle$ ，切平面是 $15x + 12y - z = C$ 。代入 $(1, 2, 13)$ ， $C = 26$

也可以根据点积求得切平面。 (x, y, z) 是切平面上的点，由于法向量与切面向量垂直，故：

这将得到相同的切平面 $15x + 12y - z = 26$

示例2

求 $x^3 + 2xy + y^2 = 9$ 在 $(1, 2)$ 处的切线。

$$\nabla w = \left\langle \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right\rangle = \langle 3x^2 + 2y, 2x + 2y \rangle$$

$$\nabla w(1, 2) = \langle 7, 6 \rangle$$

切线是 $7x + 6y = C$ 。代入 $(1, 2)$ ， $C = 19$

示例3

计算函数在 P 点处 $\hat{v}$ 方向的梯度。

$$a) f(x, y) = x^2y + xy^2, \quad P = (-1, 2), \quad \hat{v} = \langle 3, 4 \rangle$$

$$b) f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad P = (2, 6, -3), \quad \hat{v} = \langle 1, 1, 1 \rangle$$

$$c) f(w, x, y, z) = wx + wy + wz + xy + xz + yz, \quad P = (2, 0, -1, -1), \\ \hat{v} = \langle 1, -1, 1, -1 \rangle$$

$$\text{a. } f(x, y) = x^2y + xy^2, P = (-1, 2), \hat{v} = \langle 3, 4 \rangle$$

$$\nabla f(x, y) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle = \langle 2xy + y^2, x^2 + 2xy \rangle$$

$$\nabla f(-1, 2) = \langle 0, -3 \rangle$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\langle 3, 4 \rangle}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \left\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle$$

$$\left. \frac{df}{ds} \right|_{\vec{u}} = \nabla f(-1, 2) \cdot \vec{u} = \langle 0, -3 \rangle \cdot \left\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle = -\frac{12}{5}$$

$$\text{b. } f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, P = (2, 6, -3), \hat{v} = \langle 1, 1, 1 \rangle$$

首先计算一下 f_x ，似乎有些混乱，如果简化为一元函数就清晰多了：

$$y = \sqrt{x^2 + a^2 + b^2} = (x^2 + a^2 + b^2)^{1/2}$$

$$u = x^2 + a^2 + b^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} u^{-1/2} \times 2x = \frac{x}{\sqrt{u}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2 + b^2}}$$

用 y 和 z 替换 a 和 b ，就得到关于 x 的偏导，同理可得 f_y, f_z ：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\nabla f(x, y, z) = \left\langle \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right\rangle$$

$$\nabla f(2, 6, -3) = \left\langle \frac{2}{7}, \frac{6}{7}, -\frac{3}{7} \right\rangle$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\langle 1, 1, 1 \rangle}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \langle 1, 1, 1 \rangle$$

$$\left. \frac{df}{ds} \right|_{\vec{u}} = \nabla f(2, 6, -3) \cdot \vec{u} = \left\langle \frac{2}{7}, \frac{6}{7}, -\frac{3}{7} \right\rangle \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \langle 1, 1, 1 \rangle = \frac{5\sqrt{3}}{21}$$

c.

$$f(w, x, y, z) = wx + wy + wz + xy + xz + yz, \quad P = (2, 0, -1, -1),$$

$$\hat{v} = \langle 1, -1, 1, -1 \rangle$$

$$\begin{aligned}\nabla f(w, x, y, z) &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial w}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle \\ &= \langle x + y + z, w + y + z, w + x + z, w + x + y \rangle\end{aligned}$$

$$\nabla f(2, 0, -1, -1) = \langle -2, 0, 0, 1 \rangle$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\langle 1, -1, 1, -1 \rangle}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2} \langle 1, -1, 1, -1 \rangle$$

$$\left. \frac{df}{ds} \right|_{\vec{u}} = \nabla f(2, 0, -1, -1) \cdot \vec{u} = \langle -2, 0, 0, 1 \rangle \cdot \frac{1}{2} \langle 1, -1, 1, -1 \rangle = -\frac{3}{2}$$

出处: 微信公众号 "我是8位的"

本文以学习、研究和分享为主, 如需转载, 请联系本人, 标明作者和出处, 非商业用途!

扫描二维码关注作者公众号 "我是8位的"



随笔

分类: 多变量微积分

标签: 梯度, 方向导数

好文要顶

关注我

收藏该文



我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

+加关注

1

推荐

0

反对

« 上一篇: 多变量微积分笔记4——全微分与链式法则

» 下一篇: 多变量微积分笔记6——拉格朗日乘数法

posted on 2018-02-02 10:07 我是8位的 阅读(7073) 评论(1) 编辑 收藏 举报

刷新评论 刷新页面 返回顶部

登录后才能查看或发表评论, 立即 登录 或者 逛逛 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集, 分享最打动你的科技女性故事

【推荐】华为开发者专区, 与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告 X

yo zodcs.com

永中DCS，文档在线预览处理专家

10年行业经验，受到众多政府客户、央企单位、邮箱客户、OA办公系统、招聘网站、教育客户青睐

了解详情 >

编辑推荐：

- 革命性创新，动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的？
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

活动时间：2022年3月8日~3月18日



最新新闻：

- 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
 - 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能，可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
博客园

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes